

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

SOLUȚII ȘI BAREME, CLASA a X a,

1. a) $\log_2 3 + \log_3 2 \geq 2$ (2p); $\log_2 3 + \log_3 2 < 3$, deci partea întreagă este 2 (3p)

b) Dacă $\log_x a = m$, $\log_x b = n$, $\log_x c = p$ se ajunge la $\frac{n+p}{m} + \frac{m+p}{n} + \frac{m+n}{p} \geq 6$ (2p)

și apoi se demonstrează această inegalitate (2p)

2. a) Din ipoteză obținem $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \overline{\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}} = 0$, de unde

$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \overline{\frac{z_1}{z_2}} + \overline{\frac{z_2}{z_3}} + \overline{\frac{z_3}{z_1}} = 0$, deci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 0$, de unde relația (4p)

b) Din relația de la a) rezultă $(z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) = 3$ de unde $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3$ deci $|z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{3}$ (3p)

3. a) Relația devine $5\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$, care duce la $x < 2$ (2p)

b) Scăzând cele două relații se obține $3^x - 2^x = 3^y - 2^y + 4$. Dacă $x < 2$ rezultă ca la a) că $3^x - 2^x < 5$, deci $3^y - 2^y < 1$, adică $\left(\frac{1}{3}\right)^y + \left(\frac{2}{3}\right)^y > 1$, de unde $y < 1$. Atunci $2^x + 3^y < 7$, fals (2p)

Analog, presupunerea $x > 2$ duce la contradicție (2p)

Așadar $x = 2, y = 1$ (1p)

4. a) Din enunț obținem $f(f(f(x))) = f(-x)$, $x \in \mathbb{Z}$ și, înlocuind în enunț x cu $f(x)$ rezultă că $f(f(f(f(x)))) = -f(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, de unde concluzia (2p)

b) injectivitatea (1p)

surjectivitatea (1p)

c) De exemplu $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(2n) = 2n + 1$, $f(2n + 1) = -2n$, $f(-2n) = -2n - 1$, $f(-2n - 1) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, verifică relația (3p)